**EXERCICE 4** **7 points**

**PARTIE A**

On définit sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ la fonction $g$ par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

**1.** La fonction $g$ somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur le trinôme $x^2 - 2x + 2$.

**2.** On a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 - 1 + 2 = (x-1)^2 + 1$.

Comme $(x-1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, ce trinôme est donc supérieur à zéro pour tout $x > 0$ : la fonction $g$ est donc strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

**3.** • On a $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{2}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Par somme de limites on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Par somme de limites on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**4.**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $g$ est continue sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ car dérivable sur cet intervalle et on a démontré que sur cet intervalle la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On a (calculatrice) $g(0,5) \approx -0,69$ et $g(1) = 1$ , le même théorème permet d'affirmer que

$0,5 < \alpha < 1$.

**PARTIE B**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x.$$

**1.** On admet que pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$.

Produit de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x)$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f''(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + \mathrm{e}^x \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

**2.** On a donc $f''(x) = \mathrm{e}^x g(x)$.

**3.** **a.** Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel $x$, le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$ donné précédemment, soit

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**b.** On sait que si $f''(\beta) = 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\beta$.

Or $f''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x g(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha$.

*Rem.* : la calculatrice donne $\alpha \approx 0,592$, puis $f(\alpha) \approx -0,948$. Le point A$(0,592\ ;\ -0,948)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

**c.** On a vu que sur sur l'intervalle $]0\ ;\ \alpha]$, la dérivée seconde est négative : la fonction $f$ est concave sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$ la dérivée seconde est positive : la fonction $f$ est convexe sur cet intervalle.

**4.** **a.**
- On a $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ , donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

**b.** On sait que $g(\alpha) = 0 \iff \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2}(1-2\alpha)$.

Donc $f'(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \ln\alpha\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha}\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

**c.** On sait que $\mathrm{e}^\alpha > 0$, $\alpha^2 > 0$ et que $\alpha \approx 0,592 < 1$, donc $1-\alpha > 0$. Donc $f'(\alpha) > 0$ comme produit de trois facteurs supérieurs à zéro.

On a vu que $f''(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, donc :

- sur $]0\ ;\ \alpha]$, $g(x) < 0$, donc $\mathrm{e}^x g(x) = f''(x) < 0$ : la fonction $f'$ est décroissante sur cet intervalle;
- sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$, donc $\mathrm{e}^x g(x) = f''(x) > 0$ : la fonction $f'$ est croissante sur cet intervalle;
- Donc $f'(\alpha)$ est le minimum de la fonction $f'$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Ce minimum étant supérieur à zéro, on a donc $f'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et enfin la fonction $f$ est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

**d.** On peut établir le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ :

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\approx -0,948$ | $0$ | $+\infty$ |